Resume

Det primære formål med opgaven er at undersøge, om fotoner altid opfører sig klassisk, eller om de også har kvantemekaniske egenskaber. Det opnås gennem en udledning af Bells ulighed, der ved at indføre et forskelligt interval for en parameter, S, ifølge hhv. den klassiske fysik og kvantemekanikken, muliggør en eksperimentel undersøgelse af, hvorvidt fotoners polarisation er et klassisk eller et kvantemekanisk fænomen. Først redegør opgaven for den lineære algebra og de kvantemekaniske postulater, der er nødvendige for udledningen af Bells ulighed. Dernæst udledes Bells ulighed, hvor intervallet for parameteren S bestemmes til $-2 \leq S \leq 2$ for den klassiske fysik, og $-2\sqrt{2} \leq S \leq 2\sqrt{2}$ for kvantemekanikken. Et forsøg, hvor der måles på polarisationstilstande for sammenfiltrede fotoner, udføres to gange, og på baggrund af forsøget bestemmes S-værdien til $2{,}488$ for første måling og $2{,}549$ for anden måling med en spredning på 0,020. Selvom resultatet afviger med ca. 10% fra den højest mulige værdi på $2\sqrt{2}$, overskriver det den klassiske grænse med hhv. 23 og 26 spredninger, og dermed konkluderes, at Bells ulighed er brudt. Det viser, at fotoners polarisation følger kvantemekanikkens forudsigelser, og dermed er det bevist, at fotoner ikke altid opfører sig, som den klassiske fysik forudsiger.

Indholdsfortegnelse

1. Indledning - Er verden deterministisk eller spiller gud med terninger? 3

2. Lineær algebra i forbindelse med Bells ulighed 3

3. Kvantemekaniske postulater 5

3.1 Postulat 1 5

3.2 Postulat 2 6

3.3 Postulat 3 6

3.4 Postulat 4 7

3.5 Postulat 5 8

4. Polarisationstilstande for fotoner 8

5. Bells ulighed 11

5.1 Historisk baggrund for Bells ulighed 11

5.2 Klassisk udledning af Bells ulighed 12

5.3 Kvantemekanisk udledning 13

6. Forsøg 18

6.1 Formål 18

6.2 Down-konvertering 18

6.3 Fremgangsmåde 18

6.4 Databehandling 20

6.5 Brydes Bells ulighed? 21

6.6 Konklusion 23

7. Metodeafsnit 23

8. Konklusion 24

9. Litteraturfortegnelse 25

10. Bilag 26

1. Indledning - Er verden deterministisk eller spiller gud med terninger?

Lys har altid spillet en stor rolle i menneskets liv, men selvom vi alle er omgivet af lys hver eneste dag, ved de færreste, hvordan lys opfører sig på et mikroskopisk plan. Fysikere har beskæftiget sig med spørgsmålet gennem tiden, og det har ført til store uoverensstemmelser undervejs, bl.a. mellem to af datidens største fysikere Bohr og Einstein, der repræsenterede hver sin skole, hhv. kvantemekanikken og den klassiske fysik. Men kan det virkelig være rigtigt, at fysikken for små partikler, heriblandt fotoner, er probabilistisk, som Bohr påstod? Eller er det nærmere Einstein, der havde fat i den lange ende, da han insisterede på, at også deres opførsel kan determineres ud fra den klassiske fysiks love?

Netop dette spørgsmål søges besvaret i opgaven ved hjælp af Bells ulighed, der muliggør en eksperimentel undersøgelse af, hvorvidt Bohr eller Einstein havde ret. Først vil der redegøres for den lineære algebra og de kvantemekaniske postulater, der ligger til grund for udledningen af Bells ulighed (1963), samt for fotoners polarisationstilstande. Derefter vil Bells ulighed udledes, og der vil udføres et eksperiment, hvor der måles på polarisationen af sammenfiltrede fotoner. På baggrund af forsøget vil det vurderes, hvorvidt Bells ulighed holder, og fotoner dermed opfører sig klassisk, eller om uligheden bliver brudt, og fotoner retter sig efter kvantemekanikkens love. Der findes mange versioner af Bells ulighed. Opgaven vil beskæftige sig med CHSH-formuleringen, men betegne denne Bells ulighed. Opgavens omfang er 39700 tegn (inklusive ligninger) svarende til 16,5 normalsider.

2. Lineær algebra i forbindelse med Bells ulighed

Afsnittet vil indføre de matematiske begreber inden for den lineære algebra, der er nødvendige for den kvantemekaniske udledning af Bells ulighed.

Braket notation er en anden måde at skrive det indre produkt i et vektorrum på. Normalt skrives et indre produkt mellem vektoren v og vektoren u med følgende notation:

$$\langle v,u\rangle = v_1u_1 + v_2u_2 + \cdots + v_nu_n \tag{1}$$

Med braket notationen skrives det indre produkt i stedet:

$$\langle v|u\rangle = v_1^*u_1 + v_2^*u_2 + \cdots + v_n^*u_n \tag{2}$$

Når det indre produkt opsplittes i dets to komponenter, fås $\langle\cdot|$, som kaldes en bra, og $|\cdot\rangle$, der kaldes en ket. En ket har ikke nogen virkning på vektoren, der indsættes, men tydeliggør blot, at der er tale om en vektor. Derimod påvirker en bra den vektor, som indsættes. Bra'en omdanner vektoren til en

rækkevektor, så vektorens koordinater skrives vandret frem for lodret, og kompleks konjugerer koordinatværdierne:[1]

$$\overline{|u\rangle} \rightarrow \langle u| \qquad \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_n \end{pmatrix} \rightarrow (u_1^*, u_2^*, u_n^*) \tag{3}$$

Hvis et komplekst tal skrives $z = a + ib$, så vil den komplekst konjugerede af z skrives:

$$z^* = a - ib \tag{4}$$

En vigtig egenskab ved kompleks konjugeringen er, at produktet mellem z og z^* altid er et reelt tal:[2]

$$z \cdot z^* = |z|^2 \tag{5}$$

Regnereglerne for det indre produkt er de samme som for skalarproduktet i rumgeometrien, med undtagelse af at der skal tages højde for de imaginære tal. Det kommer bl.a. til udtryk ved, at det indre produkt ikke er kommutativt, da der skal foretages en kompleks konjugering, hvis rækkefølgen ombyttes:[3]

$$\langle v,u\rangle = \overline{\langle u,v\rangle} \tag{6}$$

Ligesom for skalarproduktet i rumgeometrien, gælder følgende for det indre produkt:[4]

$$\langle v|u\rangle = |v||u|\cos(\theta) \tag{7}$$

Hvor $|\cdot|$ angiver længden af vektoren, og θ er vinklen mellem de to vektorer. Det ses, at hvis vektorerne er ortogonale, vil det indre produkt være nul, mens et indre produkt for to parallelle vektorer, herunder mellem en vektor og sig selv, vil give produktet af de to vektorers længde.
I senere udregninger vil det udnyttes, at konstanter kan sættes uden for det indre produkt (8), og at det indre produkt mellem flere vektorer kan beregnes ledvis (9):[5]

$$\langle \alpha v|u\rangle = \langle v|\alpha u\rangle = \alpha\langle v|u\rangle \tag{8}$$

$$(\langle v| + \langle w|)|u\rangle = \langle v|u\rangle + \langle w|u\rangle \tag{9}$$

En anden relevant parameter fra den lineære algebra er tensorproduktet. Et tensorprodukt kan bruges til at beskrive et to-partikel system, da det kombinerer to vektorrum. Tensorproduktet mellem v og u skrives:

$$|v\rangle \otimes |u\rangle = |v\rangle|u\rangle \tag{10}$$

Et tensorprodukt minder om et kartesisk produkt, idet hvert koordinat fra $|v\rangle$ kombineres med hvert koordinat fra $|u\rangle$:

---

[1] Zwiebach (2013), *Diracs's Bra and Ket Notation*, s. 1-4
[2] Lefmann (2011), *Komplekse tal*, s. 8
[3] DTU (2014), *Hilbert rum del 1*, 13:30-14:40
[4] Hoff (2018), *Kvantemekanik…,* s. 1
[5] DTU (2014), *Hilbert rum del 1*, 11:47-13:30

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 u_1 \\ v_1 u_2 \\ v_2 u_1 \\ v_2 u_2 \end{pmatrix} \tag{11}$$

Den dannede vektor, $|v\rangle|u\rangle$, vil udspænde sig i vektorrummet $V \otimes U$, hvilket betyder, at hvis $|v\rangle$ befinder sig i et n dimensionalt rum, og $|u\rangle$ befinder sig i et m dimensionalt rum, vil vektoren $|v\rangle|u\rangle$ befinde sig i et rum af $n \cdot m$ dimensioner og dermed et rum med $n \cdot m$ antal basisvektorer. Ligesom for det indre produkt, kan konstanter sættes uden for tensorproduktet (12), og tensorproduktet kan beregnes ledvis (13):[6]

$$|\alpha v\rangle \otimes |u\rangle = |v\rangle \otimes |\alpha u\rangle = \alpha(|v\rangle \otimes |u\rangle) \tag{12}$$

$$(|v\rangle + |w\rangle) \otimes |u\rangle = |v\rangle \otimes |u\rangle + |w\rangle \otimes |u\rangle \tag{13}$$

Her er tensorproduktet illustreret med ket'er, men samme regler er gældende, hvis der regnes med bra'er i stedet.

3. Kvantemekaniske postulater

I det følgende vil der introduceres fem postulater, som er med til at danne baggrunden for den kvantemekaniske udledning af Bells ulighed. Afsnittet er baseret på Ulrich B. Hoffs artikel om kvantemekanik (2018).[7]

3.1 Postulat 1

For at beskrive fotoners polarisation kvantemekanisk, bruges vektorrummet, Hilbert rum, $\mathcal{H}$, som også kaldes tilstandsrummet. Rummet er uendeligt dimensionalt og har den egenskab, at de basisvektorer, der udspænder rummet, er ortonormale. Det vil sige, at basisvektorerne alle har længden 1 og er vinkelrette på hinanden, hvilket kaldes normaliseringsbetingelsen. Da en foton kan være polariseret i enten horisontal eller vertikal retning, behøves kun to dimensioner til at beskrive en enkelt fotons polarisationstilstand. Dermed kan der defineres to basisvektorer, en i horisontal og en i vertikal retning:

$$|H\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad |V\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{14}$$

Dog er en fotons polarisationstilstand ikke altid enten lodret eller vandret, den kan også befinde sig i en superposition mellem de to. En superposition vil sige, at fotonen befinder sig i en samtidig blanding af de to forskellige tilstande. Det kan beskrives ved en tilstandsvektor af formen:

---

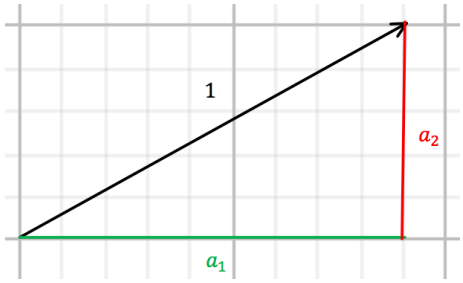
[6] Zwiebach (2013), *Multiparticle States and Tensor Products*, s. 2-3
[7] Hoff (2018), *Kvantemekanik…*

$$|\psi\rangle = a_1|H\rangle + a_2|V\rangle \tag{15}$$

Hvor a_1 og a_2 er komplekse tal. Da tilstandsvektoren er normaliseret og dermed har længden 1, vil resultatet af det indre produkt mellem vektoren og sig selv være 1:

$$\begin{gathered}\langle\psi|\psi\rangle = (a_1^{\cdot}\langle H| + a_2^{\cdot}\langle V|)(a_1|H\rangle + a_2|V\rangle) = 1 <=> \\ \langle\psi|\psi\rangle = (a_1^*, a_2^*)\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = a_1^* a_1 + a_2^* a_2 = |a_1|^2 + |a_2|^2 = 1\end{gathered} \tag{16}$$

Det ses, at summen af kvadratet på absolutværdien af de to koefficienter altid vil være lig 1, hvilket stemmer overens med Pythagoras' læresætning ift. vektorer i planen (se figur 1)



Figur 1: Vektor i planen med længden 1.

3.2 Postulat 2

Enhver egenskab ved et fysisk system i kvantemekanikken, f.eks. fotoners polarisation, beskrives ved operatorer, der kan betegnes Â. En operator repræsenterer en observerbar størrelse, A, der altid vil antage en af operatorens egenværdier, a_i. Da egenværdierne er diskrete, er det et udtryk for, at fysiske størrelser i kvantemekanikken er kvantiseret og dermed kun kan antage bestemte værdier, i dette tilfælde at en foton kun kan være enten horisontalt eller vertikalt polariseret, når tilstanden måles. Når en operator virker på en tilstand, skrives det:

$$\hat{A}|\psi\rangle = |\psi\rangle \rightarrow |\psi'\rangle \tag{17}$$

Det viser, at operatoren ændrer på tilstanden af den fysiske egenskab. En undtagelse er, når en operator virker på en af sine egenvektorer, der forbliver tilstanden den samme, men skaleres med en egenværdi:

$$\hat{A}|a_i\rangle = a_i|a_i\rangle \tag{18}$$

3.3 Postulat 3

Operatorerne er hermitiske, hvilket betyder, at deres egenværdier er reelle tal, og deres egenvektorer er ortonormale. Dermed vil det indre produkt af to egenvektorer give nul, medmindre det er mellem to identiske egenvektorer, hvor det vil give en. Det kan udtrykkes ved et Konecker-delta, δ_{ij}:

$$\langle a_i|a_j\rangle = \delta_{ij} \tag{19}$$

Hvor δ_{ij} har egenskaben:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, hvis\ i = j \\ 0, hvis\ i \neq j \end{cases} \tag{20}$$

3.4 Postulat 4

Sandsynligheden for at en måling giver resultatet a_n er givet ved kvadratet på absolutværdien af det indre produkt mellem tilstandsvektoren, $|\psi\rangle$, og egenvektoren $|a_n\rangle$:

$$P(a_n) = |\langle a_n|\psi\rangle|^2 \tag{21}$$

Hvor $\langle a_n|\psi\rangle$ kaldes sandsynlighedsamplituden, og er et komplekst tal. Som tidligere vist, kan $|\psi\rangle$ skrives som en superposition af forskellige tilstande, udtrykt ved basisvektorer og deres respektive koefficienter (15). Det kan skrives helt generelt:

$$|\psi\rangle = \sum_j c_j |a_j\rangle \tag{22}$$

Hvor $|a_j\rangle$ betegner basisvektor nummer j, og c_j betegner den tilhørende koefficient.

Ligning 22 indsættes i ligning 21:

$$\langle a_n|\psi\rangle = \sum_j c_j \langle a_n|a_j\rangle = \sum_j c_j \delta_{nj} = c_n \tag{23}$$

Resultatet bliver koefficienten c_n, idet det ses fra ligning 19, at det indre produkt mellem a_n og en anden egenvektor vil give nul i alle tilfælde, bortset fra det indre produkt med a_n selv, hvor det vil give en. Da alle andre koefficienter, c_j, dermed ganges med nul, er det kun c_n, der vil stå tilbage.

Det ses derfor, at koefficienterne i en tilstand, der er opskrevet som en superposition af egenvektorer, er lig med sandsynlighedsamplituden for at måle egenværdien, der hører til den pågældende egenvektor. Dermed kan superpositionstilstanden skrives som den totale sum af produktet mellem sandsynlighedsamplituderne og egenvektorerne:

$$|\psi\rangle = \sum_j c_j |a_j\rangle = \sum_j \langle a_j|\psi\rangle \cdot |a_j\rangle \tag{24}$$

Da summen af alle sandsynligheder altid skal give en, ses følgende fra udtrykket i 24:

$$\sum_n |\langle a_n|\psi\rangle|^2 = 1 = \sum_n |c_n|^2 \tag{25}$$

Udtrykket stemmer overens med ligning 16 i postulat 1 og viser, at sandsynligheden for at måle en given tilstand, a_n, er givet ved kvadratet på absolutværdien af den pågældende tilstands koefficient.

Når et fysisk system befinder sig i en tilstand, $|\psi\rangle$, kan middelværdien for en fysisk egenskab, A, beskrevet ved operatoren, $\hat{A}$, beregnes:

$$\langle \hat{A} \rangle = \langle \psi|\hat{A}|\psi\rangle \tag{26}$$

Det udnyttes, at tilstandsvektoren kan skrives som en sum af egenvektorer, samt at en operator, der virker på en egenvektor, blot skalerer egenvektoren med en egenværdi. Udtrykket kan skrives:

$$\langle \hat{A} \rangle = \langle \psi | \hat{A} | \psi \rangle = \sum_n c_n^* \langle a_n | a_n \rangle c_n \cdot a_n = \sum_n a_n |c_n|^2 = \sum_n a_n \cdot P(a_n) \tag{27}$$

Da $|c_n|^2$ angiver sandsynligheden for udfaldet a_n, skrives det som $P(a_n)$. Resultatet stemmer overens med beregninger af middelværdi, som de kendes fra statistikken, da udtrykket bliver summen af alle mulige udfald hver vægtet med den respektive sandsynlighed for udfaldet.

3.5 Postulat 5

Ifølge den klassiske fysik påvirkes fysiske størrelser ikke af, at der måles på dem. Det er dog ikke tilfældet i kvantemekanikken. Hvis en foton befinder sig i en superpositionstilstand, vil en måling kollapse tilstanden, som i stedet vil blive til en af operatorens egenvektorer, $|a_n\rangle$, givet ved sandsynlighedsparameteren $P(a_n)$. Hvis samme måling foretages igen umiddelbart efter, vil fotonen befinde sig i samme tilstand, som den lige var målt til. Det skyldes, at den første måling har ændret den indgående fotons tilstand fra at være i en superposition til at befinde sig i en egentilstand for operatoren. Hvis der derimod foretages en anden måling, inden den første måling gentages igen, er resultatet ikke længere med sikkerhed det samme som i første omgang. Det skyldes, at den anden måling på ny har ændret tilstanden til en egentilstand for den anden operator, som er anderledes fra den første operators egentilstande.

4. Polarisationstilstande for fotoner

De omtalte postulater vil nu benyttes til at beskrive enkelte fotoners mulige polarisationstilstande samt den sammenfiltrede tilstand, der vil blive målt på i forsøget. Indledningsvist ses på en enkelt foton. Fra ligning 16 i postulat 1 ses det, at $|a_1|^2 + |a_2|^2 = 1$. Ud fra grundrelationen ses det, at betingelsen opfyldes, hvis a_1 og a_2 er hhv. $\cos(\theta)$ og $\sin(\theta)$. Vinklen θ kaldes blandingsvinklen, idet den angiver forholdet mellem horisontal og vertikal polarisation.[8] Dermed kan en superpositionstilstand for en foton opskrives:

$$|\psi\rangle = \cos(\theta)|H\rangle + \sin(\theta)|V\rangle \tag{28}$$

Sandsynligheder for hhv. lodret og vandret polarisation for en enkel foton, når den befinder sig i en superposition, kan beregnes:

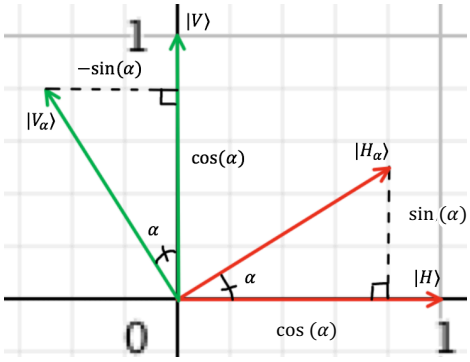
$$P_H = |\langle H|\psi\rangle|^2 = \cos^2(\theta) \tag{29}$$

$$P_V = |\langle V|\psi\rangle|^2 = \sin^2(\theta) \tag{30}$$

Her udnyttes det, at sandsynlighedsamplituden er lig med kvadratet på absolutværdien af koefficienten, som blev vist i ligning 26 i 4. postulat.

[8] Hoff (2018), *Kvantemekanik…*, s. 3

En fotons polarisation kan beskrives udtrykt ved andre basisvektorer end $|H\rangle$ og $|V\rangle$, hvis blot vektorerne er ortonormale.[9] Dermed kan alle vektorpar med længden en, som er vinkelrette på hinanden og blot er roteret med vinklen α i forhold til $|H\rangle$ og $|V\rangle$, bruges til at udtrykke fotonens polarisation (se figur 2):



Figur 2: H-V basis roteret med vinklen α.

$$|H_\alpha\rangle = \begin{pmatrix}\cos(\alpha)\\ \sin(\alpha)\end{pmatrix} \text{ og } |V_\alpha\rangle = \begin{pmatrix}-\sin(\alpha)\\ \cos(\alpha)\end{pmatrix} \tag{31}$$

Det ses, at basisvektorerne stadig er ortogonale, idet $|V_\alpha\rangle$'s koordinater er forskudt med $\frac{\pi}{2}$ ift. $|H_\alpha\rangle$:

$$\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin(\alpha) \text{ og } \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(\alpha) \tag{32}$$

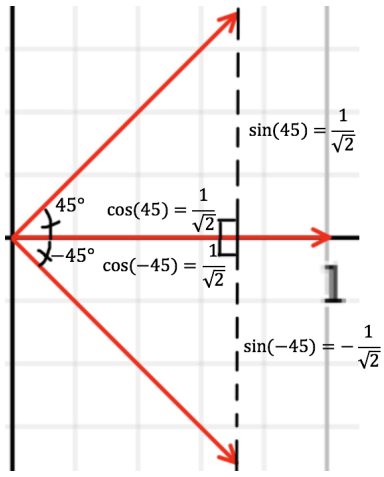
Rotationen af H-V basen kan også udtrykkes ved en rotationsmatrice, $R(\alpha)$, der ganges på begge basisvektorer:[10]

$$|H_\alpha\rangle = R(\alpha)|H\rangle \text{ og } |V_\alpha\rangle = R(\alpha)|V\rangle \tag{33}$$

$$R(\alpha) = \begin{pmatrix}\cos(\alpha) & -\sin(\alpha)\\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha)\end{pmatrix} \tag{34}$$

Da $|H\rangle = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ vil kun venstre søjle af rotationsmatricen bevares, når den ganges på vektoren, og det omvendte er gældende for $|V\rangle$, hvor kun den højre søjle bevares.

Et eksempel på en roteret basis, er når basisvektorerne roteres $\pm 45°$ ift. $|H\rangle$. Den nye basis kaldes $\pm$-basen, og da både sinus og cosinus til 45° giver $\frac{1}{\sqrt{2}}$, kan basen skrives (se figur 3): [11]



Figur 3: ±-basen.

$$|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|H\rangle + |V\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \quad \text{og} \quad |-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|H\rangle - |V\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} \tag{35}$$

[9] Hoff (2018), *Kvantemekanik…*, s. 3
[10] Hoff (2018), *Kvantemekanik…*, s. 3
[11] Hoff (2018), *Kvantemekanik…*, s. 3

Tilsvarende kan H-V basen udtrykkes ud fra $\pm$-basen:

$$|H\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle + |-\rangle) \quad \text{og} \quad |V\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle - |-\rangle) \tag{36}$$

Det ses, at dette er rigtigt, idet:

$$|H\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle + |-\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}\right) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \tag{37}$$

Som omtalt i postulat 5 vil en foton, der er målt til at være horisontalt polariseret, give samme resultat, hvis samme måling foretages igen umiddelbart efter. Hvis måleapparatet derimod drejes 45°, så der nu måles i $\pm$basen, vil sandsynligheden for at måle polarisationen til at være hhv. $|+\rangle$ og $|-\rangle$ være givet ved:

$$P_+ = |\langle +|H\rangle|^2 = |\frac{1}{\sqrt{2}}\langle +|(|+\rangle + |-\rangle)|^2 = \left|\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 1^2 + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 0\right|^2 = \frac{1}{2} \tag{38}$$

$$P_- = |\langle -|H\rangle|^2 = |\frac{1}{\sqrt{2}}\langle -|(|+\rangle + |-\rangle)|^2 = \left|\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 0 + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 1^2\right|^2 = \frac{1}{2} \tag{39}$$

Det ses, at der er 50% sandsynlighed for at måle fotonen til at være hhv. horisontal og vertikal i den nye basis.

Hvis man i stedet kigger på fotoners polarisation i et to-partikel system, benyttes tensorproduktet (se side 5). Ved at tage tensorproduktet mellem de to tilstandsrum, som fotonerne hver især befinder sig i, dannes et nyt tilstandsrum af fire dimensioner. De fire nye basisvektorer bliver:

$$\begin{aligned} |H\rangle_1 \otimes |H\rangle_2 &= \begin{pmatrix}1|H\rangle_2\\0|H\rangle_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} \quad |H\rangle_1 \otimes |V\rangle_2 = \begin{pmatrix}1|V\rangle_2\\0|V\rangle_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix} \\ |V\rangle_1 \otimes |H\rangle_2 &= \begin{pmatrix}0|H\rangle_2\\1|H\rangle_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix} \quad |V\rangle_1 \otimes |V\rangle_2 = \begin{pmatrix}0|V\rangle_2\\1|V\rangle_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix} \end{aligned} \tag{40}$$

Hvis fotonernes polarisationstilstand kan beskrives enkeltvis, siges de at være separable, idet den ene fotons polarisation ikke påvirker den andens.[12] Hvis to fotoner ikke er separable, siges de at være i en sammenfiltret tilstand. Tilstanden kan dannes ved en down-konvertering (se side 19) og vil ved den metode generelt opnå tilstanden:

$$|\psi\rangle = \cos(\theta_i)|H\rangle_1|H\rangle_2 + e^{i\phi}\sin(\theta_i)|V\rangle_1|V\rangle_2 \tag{41}$$

[12] Hansen og Ottesen (2013), *Seperabilitet og graden af entanglement for endeligt dimensionale Hilbert rum,* s. 19

Her er θ_i lysets indkommende vinkel, inden det rammer krystallen, hvor lyset down-konverteres, og ϕ er en størrelse, der opstår fra dobbeltbrydning og dispersion i krystallerne.[13] Hvis $\phi = 0$, og $\theta_i = \frac{\pi}{4}$ opstår et specialtilfælde, hvor der dannes maksimalt sammenfiltrede tilstande.[14] Et eksempel er:

$$|\Phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (|\mathrm{H}\rangle_1 |\mathrm{H}\rangle_2 + |\mathrm{V}\rangle_1 |\mathrm{V}\rangle_2) \tag{42}$$

Tilstandene kaldes også Bell tilstande, da de giver anledning til det størst mulige brud på Bells ulighed. I forsøget vil der måles på tilstanden i 42.

5. Bells ulighed

5.1 Historisk baggrund for Bells ulighed

Følgende afsnit bygger på Andersen og Wades artikel "Bohr vs. Einstein" (2013).[15] Da kvantemekanikken tog form op gennem 20'erne og 30'erne, var det en stor omvæltning for den klassiske fysik, man kendte på daværende tidspunkt. Det skyldtes bl.a. fremkomsten af en hypotese om, at enkelte partikler kan opføre sig som bølger, hvorudfra Erwin Schrödinger i 1926 fremsatte en bølgeligning. Bølgeligningen, der i opgaven kommer til udtryk som tilstandsvektoren (15), var en forudsigelse af, hvordan verden opfører sig på partikelniveau. Dog var partiklernes position beskrevet ved sandsynligheder, ligesom det er tilfældet for fotoners polarisation, som det ses i postulat 4 (se side 8). Det medførtes, at bølgebeskrivelsen blev kritiseret for dens tilfældighed, og blandt kritikerne var Einstein. Han påstod, at bølgefunktionen ikke var en fuldkommen beskrivelse af et fysisk system, men at der måtte eksistere skjulte variable, der bestemte udfaldet for målingerne – han nægtede at acceptere, at dele af verden var probabilistisk, altså tilfældigt bestemt af sandsynligheder. Det førte til, at han i samarbejde med Podolsky og Rosen fremsatte det såkaldte EPR-paradoks i 1935, der havde til mål at overbevise om, at kvantemekanikken med bølgebeskrivelsen ikke var en komplet teori. Paradokset byggede på to antagelser, a) at en måling ikke påvirker det fysiske system, som der måles på og b) at hvis der ændres på et system et sted i rummet, vil det ikke have en umiddelbar virkning et andet sted. Antagelse b betegnes lokalitetsprincippet og bygger på, at intet signal kan bevæge sig hurtigere end med lysets hastighed. Paradokset består i, at hvis to sammenfiltrede fotoner bliver sendt til hhv. månen og jorden, og polarisationen af fotonen på jorden bestemmes, så vil man have ændret tilstanden af fotonen på månen. Ifølge lokalitetsprincippet burde det ikke være muligt, og derfor konkluderede EPR, at

[13] Dehlinger og Mitchell (2002), *Entangled photons, nonlocality…*, s. 905
[14] Dehlinger og Mitchell (2002), *Entangled photons, nonlocality…*, s. 905
[15] Andersen og Wade (2013), *Bohr vs. Einstein*, s. 27

bølgefunktionen var mangelfuld. Modsat Einstein var Bohr overbevist om, at bølgefunktionen var en komplet beskrivelse af et kvantemekanisk system, og at det var Einstein og den klassiske fysik, der tog fejl i dette henseende. Uoverensstemmelserne mellem Bohr og Einstein førte til en årelang debat mellem de to. Da ingen af dem kunne eftervise deres påstande eksperimentelt, var debatten præget af tankeeksperimenter og filosofiske argumenter, hvilket medførte, at ingen fik endegyldigt ret på det tidspunkt. Derfor var det af afgørende betydning, da John S. Bell udledte, hvad der i dag er kendt som Bells ulighed. Uligheden er baseret på korrelationsfunktioner for en sammenfiltret tilstand og udtrykker vha. statistiske beregninger et forskelligt sæt af grænser for en konstrueret parameter, S, udledt for hhv. de klassiske og de kvantemekaniske forudsigelser. Med uligheden åbnedes muligheden for at undersøge eksperimentelt, om der var skjulte variable tilstede eller ej, og dermed hvorvidt Bohr eller Einstein havde ret. Derfor vil de klassiske og kvantemekaniske grænser for S nu udledes, og derefter vil det undersøges eksperimentelt, om den klassiske ulighed brydes.

5.2 Klassisk udledning af Bells ulighed

De klassiske grænser for S er udledt på baggrund af Ulrich Hoffs artikel "Prøv kræfter med kvantemekanikken…" (2017).[16] Der er to detektorer A og B, der hver har to mulige indstillinger, hhv. A/A' og B/B', givet ved vinklerne α/α' og β/β'. Der er kun to mulige udfald for hver indstilling, $+1$ og -1 for hhv. en horisontalt og en vertikalt polariseret foton. Den klassiske version af Bells ulighed følger Einsteins påstande og er dermed udledt under antagelsen om lokalitet – at målingen ved A ikke afhænger af vinklen beta og omvendt – samt at målingen ikke ændrer på systemets tilstand. Der indføres en størrelse for de skjulte variable, λ, med sandsynlighedsparameteren, $p(\lambda)$. Det er her uden betydning, om λ betegner en eller flere skjulte variable. Der kendes ikke til, hvordan sandsynlighedsfordelingen ser ud, men det må gælde, at summen af alle sandsynligheder er lig 1:

$$\int p(\lambda)\mathrm{d}\lambda = 1 \tag{43}$$

Der opskrives en korrelationsfunktion, der er defineret som middelværdien af produktet af udfaldet ved A og B. Som navnet angiver, er korrelationsfunktionen en måde at undersøge, om målingerne ved A og B er korrelerede. Hvis $\langle A \cdot B \rangle > 0$, er der en tendens til, at A og B giver samme resultat. Hvis $\langle A \cdot B \rangle = 0$, er der ingen korrelation. Hvis $\langle A \cdot B \rangle < 0$, er der en tendens til, at A og B giver modsat resultat og dermed er anti-korrelerede. Korrelationsfunktionen afhænger af α, β og λ, idet A og B afhænger af disse variable:

[16] Hoff (2017), *Prøv kræfter med kvantemekanikken…,* s. 41-42

$$E(\alpha,\beta,\lambda) = \langle A \cdot B \rangle = \int A(\alpha,\lambda)\, B(\,\beta,\lambda) p(\lambda) d\lambda \tag{44}$$

Parameteren, s, defineres som en kombination af de fire mulige udfald:

$$s = A(B - B') + A'(B + B') \tag{45}$$

Middelværdien af s, S, afhænger af sandsynlighedsfordelingen, $p(\lambda)$, og kan skrives:

$$S = \langle s \rangle = \int s p(\lambda) d\lambda \tag{46}$$

Ligning 45 indsættes i ligning 46 og variablene for A og B angives:

$$S = \int (A(\alpha,\lambda)\big(B(\beta,\lambda) - B'(\beta',\lambda)\big) + A'(\alpha',\lambda)(B(\beta,\lambda) + B'(\beta',\lambda)))p(\lambda)d\lambda \tag{47}$$

Parenteserne ophæves, og integralet opdeles ledvis:

$$S = \int A(\alpha,\lambda)B(\beta,\lambda)p(\lambda)d\lambda - \int A(\alpha,\lambda)B'(\beta',\lambda)p(\lambda)d\lambda \tag{48}$$

$$+ \int A'(\alpha',\lambda)B(\beta,\lambda)p(\lambda)d\lambda + \int A'(\alpha',\lambda)B'(\beta',\lambda)p(\lambda)d\lambda$$

Det ses ud fra 44, at de enkelte led svarer til korrelationsfunktionen for de pågældende udfald:

$$S = E(\alpha,\beta,\lambda) - E(\alpha,\beta',\lambda) + E(\alpha',\beta,\lambda) + E(\alpha',\beta',\lambda) \tag{49}$$

Grænserne for S ønskes at bestemmes, og derfor undersøges de mulige værdier for s. Først bestemmes de mulige værdier af B+B' og B-B', som er angivet i figur 4 og 5.

$B + B'$		B	
		$+1$	-1
B'	$+1$	$+2$	0
	-1	0	-2

Figur 4: Mulige værdier for $B + B'$.

$B - B'$		B	
		$+1$	-1
B'	$+1$	0	-2
	-1	$+2$	0

Figur 5: Mulige værdier for $B - B'$.

Det ses, at hhv. summen og differensen af B og B' kun kan antage værdierne ± 2 og 0, samt at hvis summen giver ± 2, vil differensen give 0 og omvendt. Da både A og A' kun kan antage værdierne -1 eller $+1$, vil s altid give $+2$ eller -2. Dermed må middelværdien for s befinde sig inden for intervallet:

$$-2 \leq S \leq 2 \tag{50}$$

5.3 Kvantemekanisk udledning

Nu udledes begrænsningerne for S ifølge kvantefysikken, så de to teorier kan sammenlignes eksperimentelt. Udledningen tager udgangspunkt i Ulrich Hoffs artikel "Prøv kræfter med

kvantemekanikken…" (2017)[17]. Korrelationsfunktionen er defineret på samme vis som i den klassiske udledning med den forskel, at $p(\lambda)$ ikke indgår, da der ifølge kvantefysikken ikke er tale om skjulte variable:

$$E(\alpha,\beta) = \langle A(\alpha)B(\beta)\rangle \tag{51}$$

Som set i ligning 27 i postulat 4 kan middelværdien beregnes som en sum af produktet mellem de forskellige udfald (se figur 6) og dets respektive sandsynlighed:

Målt tilstand	$A(\alpha)$	$B(\beta)$	$A(\alpha)B(\beta)$
$\lvert H\rangle_\alpha \cdot \lvert H\rangle_\beta$	1	1	1
$\lvert H\rangle_\alpha \cdot \lvert V\rangle_\beta$	1	-1	-1
$\lvert V\rangle_\alpha \cdot \lvert H\rangle_\beta$	-1	1	-1
$\lvert V\rangle_\alpha \cdot \lvert V\rangle_\beta$	-1	-1	1

Figur 6: Produkt af mulige udfald for A og B.

$$\begin{gathered} E(\alpha,\beta) = P_{HH}(\alpha,\beta)A(\alpha)B(\beta) + P_{VV}(\alpha,\beta)A(\alpha)B(\beta) + P_{HV}(\alpha,\beta)A(\alpha)B(\beta) \\ + P_{VH}(\alpha,\beta)A(\alpha)B(\beta) <=> \\ E(\alpha,\beta) = P_{HH}(\alpha,\beta) + P_{VV}(\alpha,\beta) - P_{HV}(\alpha,\beta) - P_{VH}(\alpha,\beta) \end{gathered} \tag{52}$$

Det antages, at fotonerne, inden målingen foretages, befinder sig i en maksimalt sammenfiltret tilstand med formlen:

$$|\Phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (|\mathrm{H}\rangle_1|\mathrm{H}\rangle_2 + |\mathrm{V}\rangle_1|\mathrm{V}\rangle_2) \tag{53}$$

De fire koincidenssandsynligheder kan bestemmes ved at tage tensorproduktet mellem fotonparrets to tilstande, beregne det indre produkt mellem to-partikel systemet og den sammenfiltrede tilstand og tage kvadratet på absolutværdien heraf. Da metoden er ens for udledningen af alle sandsynligheder, beregnes $P_{VV}(\alpha,\beta)$ her som et eksempel, mens udledningen af de resterende sandsynligheder kan findes i bilag 1. Tilstandene som defineret i 31 opskrives:

$$|V_\alpha\rangle = -\sin(\alpha)|H\rangle_1 + \cos(\alpha)|V\rangle_1 \quad |V_\beta\rangle = -\sin(\beta)|H\rangle_2 + \cos(\beta)|V\rangle_2 \tag{54}$$

Selvom det ses ud fra tilstandene i 54, at koefficienterne ikke har nogen imaginær del, laves en kompleks konjugering, inden tensorproduktet fortages, for at omdanne ket'erne til bra'er:

$$\overline{|V_\alpha\rangle \otimes |V_\beta\rangle} = \langle V_\beta| \otimes \langle V_\alpha| \tag{55}$$

Tensorproduktet mellem $\langle V_\beta|$ og $\langle V_\alpha|$ beregnes:

$$\langle V_\beta| \otimes \langle V_\alpha| = (-\sin(\beta)_2\,\langle H| + \cos(\beta)_2\,\langle V|) \otimes (-\sin(\alpha)_1\,\langle H| + \cos(\alpha)_1\,\langle V|) \tag{56}$$

Da vinklerne α og β er fastlagte i forsøget, er sinus- og cosinusværdierne konstanter og kan sættes uden for tensorproduktet:

[17] Hoff (2017), *Prøv kræfter med…*, s. 42-43

$$\langle V_\beta|\otimes\langle V_\alpha| = \sin(\beta)\sin(\alpha)_2\,\langle H|_1\langle H| - \sin(\beta)\cos(\alpha)_2\langle H|_1\langle V| \\ - \cos(\beta)\sin(\alpha)_2\,\langle V|_1\langle H| + \cos(\beta)\cos(\alpha)_2\langle V|_1\langle V| \tag{57}$$

Sandsynlighedsamplituden for at begge fotoner måles i vertikalt polariseret tilstand bestemmes ved at tage det indre produkt mellem $\langle V_\beta|\langle V_\alpha|$ og den sammenfiltrede tilstand, $|\Phi^+\rangle$:

$$\langle V_\beta|\langle V_\alpha|\Phi^+\rangle = (\sin(\beta)\sin(\alpha)_2\,\langle H|_1\langle H| - \sin(\beta)\cos(\alpha)_2\langle H|_1\langle V| - \cos(\beta)\sin(\alpha)_2\,\langle V|_1\langle H| \\ + \cos(\beta)\cos(\alpha)_2\langle V|_1\langle V|)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(|\mathrm{H}\rangle_1|\mathrm{H}\rangle_2 + |\mathrm{V}\rangle_1|\mathrm{V}\rangle_2)\right) <=>$$

$$\langle V_\beta|\langle V_\alpha|\Phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sin(\beta)\sin(\alpha)\,(\,{}_2\langle H|_1\langle H|H\rangle_1|H\rangle_2 + {}_2\langle H|_1\langle H|V\rangle_1|V\rangle_2) \\ - \sin(\beta)\cos(\alpha)\,(\,{}_2\langle H|_1\langle V|H\rangle_1|H\rangle_2 + {}_2\langle H|_1\langle V|V\rangle_1|V\rangle_2) \\ - \cos(\beta)\sin(\alpha)\,(\,{}_2\langle V|_1\langle H|H\rangle_1|H\rangle_2 + {}_2\langle V|_1\langle H|V\rangle_1|V\rangle_2) \\ + \cos(\beta)\cos(\alpha)(\,{}_2\langle V|_1\langle V|H\rangle_1|H\rangle_2 + {}_2\langle V|_1\langle V|V\rangle_1|V\rangle_2) \tag{58}$$

Basisvektorerne i det firedimensionale rum er ortonormale, så alle led med indre produkter mellem to vinkelrette vektorer, giver nul (se bilag 2), og kun de to følgende led bevares og giver en:

$${}_2\langle H|_1\langle H|H\rangle_1|H\rangle_2 = {}_2\langle V|_1\langle V|V\rangle_1|V\rangle_2 = 1 \tag{59}$$

Dermed bliver det indre produkt:

$$\langle V_\beta|\langle V_\alpha|\Phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot(\sin(\beta)\sin(\alpha) + \cos(\beta)\cos(\alpha)) \tag{60}$$

Udtrykket kan reduceres ved at benytte additionsformlerne for trigonometriske funktioner:

$$\sin(x)\sin(y) + \cos(x)\cos(y) = \cos(x-y) \tag{61}$$

$$\langle V_\beta|\langle V_\alpha|\Phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\cos(\alpha-\beta) \tag{62}$$

Sandsynligheden findes ved at tage kvadratet på absolutværdien af det indre produkt:

$$P_{VV} = \left|\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\cos(\alpha-\beta)\right|^2 = \frac{1}{2}\cdot\cos^2(\alpha-\beta) \tag{63}$$

Sandsynligheden afhænger altså udelukkende af differensen mellem vinklerne α og β. De resterende koincidenssandsynligheder ses i figur 7. Indsættes resultaterne fra tabellen i korrelationsfunktionen fås:

$P_{HH} = \frac{1}{2}\cdot\cos^2(\alpha-\beta)$	$P_{VV} = \frac{1}{2}\cdot\cos^2(\alpha-\beta)$
$P_{HV} = \frac{1}{2}\cdot\sin^2(\alpha-\beta)$	$P_{VH} = \frac{1}{2}\cdot\sin^2(\alpha-\beta)$

Figur 7: De fire koincidenssandsynligheder

$$E(\alpha,\beta) = \frac{1}{2}\cos^2(\alpha-\beta) + \frac{1}{2}\cos^2(\alpha-\beta) - \frac{1}{2}\sin^2(\alpha-\beta) - \frac{1}{2}\sin^2(\alpha-\beta) \\ = \cos^2(\alpha-\beta) - \sin^2(\alpha-\beta) \tag{64}$$

Udnyttes grundrelationen kan udtrykket omskrives, så cosinus forkortes ud og kun sinus indgår:

$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1 <=> \cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta \tag{65}$$

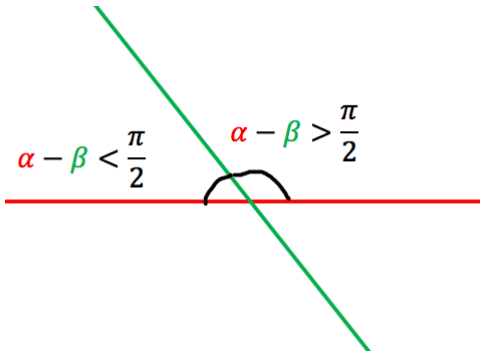
$$\begin{gathered} E(\alpha,\beta) = \cos^2(\alpha-\beta) - \sin^2(\alpha-\beta) = 1 - \sin^2(\alpha-\beta) - \sin^2(\alpha-\beta) \\ <=> E(\alpha,\beta) = 1 - 2\sin^2(\alpha-\beta) \end{gathered} \tag{66}$$

Nu kan parameteren, S, opskrives:

$$\begin{aligned} S &= (1 - 2\sin^2(\alpha-\beta)) - (1 - 2\sin^2(\alpha-\beta')) + (1 - 2\sin^2(\alpha'-\beta)) \\ &\quad + (1 - 2\sin^2(\alpha'-\beta')) \\ &= 2 + 2(\sin^2(\alpha-\beta') - \sin^2(\alpha-\beta) - \sin^2(\alpha'-\beta) - \sin^2(\alpha'-\beta')) \end{aligned} \tag{67}$$

Det ses, at den øvre grænse for s afhænger af hvilke vinkler, der vælges til hhv. α, α', β og β'. Dermed skal vinklerne udvælges varsomt, hvis man eksperimentelt ønsker at bryde Bells ulighed. Det ses ud fra ligning 67, at differensen af de kvadrerede sinusværdier i parentesen skal antage den højest mulige værdi, for at opnå det størst mulige brud på Bells ulighed. Det opnås, når $\sin^2(\alpha-\beta')$ antager den højest mulige værdi, mens de resterende negative led antager en så lav værdi som mulig. Da s er en funktion af fire variable, er det svært umiddelbart at optimere den. Dog kan der med rette gøres følgende to antagelser:

1) Afstanden mellem to vinkler skal være større end 0, men mindre end $\frac{\pi}{2}$. Det skyldes, at hvis forskellen mellem to spalters vinkler overstiger $\frac{\pi}{2}$, vil en anden vinkelforksel mellem de to spalter være under $\frac{\pi}{2}$. (se figur 8).



Figur 8: Illustration af, at vinklen mellem to spalter er mindre end $\pi/2$.

2) De tre vinkelforskelle, der indgår i de negative sinusled, skal alle have samme størrelse, og vinkelforskellen i det positive sinusled skal have den tredobbelte størrelse af disse. Det skyldes, at den største vinkelforskel ønskes for det positive sinusled og dermed mellem α og β'. De to vinkler, der ikke indgår i ledet, må dermed befinde sig inden for afgrænsningerne af α og β'. Da sinusfunktionens hældning bliver mere og mere stejl op til $\frac{\pi}{4}$, vil de tre negative sinusled udgøre det mindst mulige bidrag, hvis de alle har samme værdi. Med de to antagelser kan s opskrives udtrykt ved kun én variabel:

$$S(x) = 2 + 2 \cdot (\sin^2(3x) - 3\sin^2(x)) \,|0 < 3\mathrm{x} < \frac{\pi}{2} \tag{68}$$

For at finde maksimum for funktionen, differentieres den ved ledvis differentiation af en sammensat funktion, og sættes lig nul:

$$S'(x) = 2 \cdot (3\cos(3x)\,2\sin(3x) - 3(\cos(x)\,2\sin(x))$$

$$S'(x) = 12(\cos(3x)\sin(3x) - \cos(x)\sin(x)) \tag{69}$$

$$S'(x) = 0 = 12(\cos(3x)\sin(3x) - \cos(x)\sin(x)) = \cos(3x)\sin(3x) - \cos(x)\sin(x) \tag{70}$$

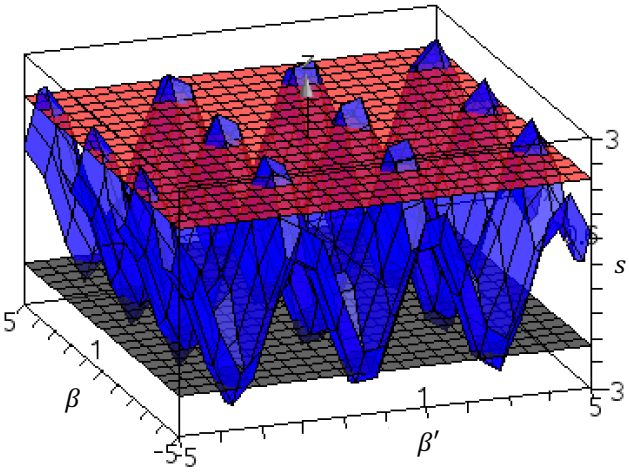
Ligningen løses i TI-Nspire (se bilag 3), og x får værdien $\frac{\pi}{8}$. Ekstremaet undersøges:

$$S'\left(\frac{0{,}9 \cdot \pi}{8}\right) = 0{,}61 \quad S'\left(\frac{1.1 \cdot \pi}{8}\right) = -0{,}71 \tag{71}$$

Da hældningen op til $x = \frac{\pi}{2}$ er positiv og efter $x = \frac{\pi}{2}$ bliver negativ, er ekstremaet et maksimum, så de fire vinkler skal indstilles med en indbyrdes afstand på $\frac{\pi}{8}$ for at opnå størst muligt brud på Bells ulighed. Hvis α sættes til 0, vil $\beta' = \frac{3\pi}{8}, \alpha' = \frac{\pi}{4}\ og\ \beta = \frac{\pi}{8}$. Vinklerne indsættes i ligning 67:

$$S = 2 + 2\left(\sin^2\left(0 - \frac{3\pi}{8}\right) - \sin^2\left(0 - \frac{\pi}{8}\right) - \sin^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{8}\right) - \sin^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{3\pi}{8}\right)\right) = 2 \cdot \sqrt{2} \tag{72}$$

Minimum for S-værdien er $-2 \cdot \sqrt{2}$, som svarer til, at fotonerne var antikorrelerede. Det kan aflæses fra figur 9, hvor s er tegnet som funktion af β og β', da vinklerne $\alpha = 0$ og $\alpha' = \frac{\pi}{4}$ er lagt fast.



Figur 9: Grafisk afbildning af s som funktion af β og β'. Den røde og grå graf viser de klassiske grænser, og den blå graf angiver de kvantemekaniske. Det kan aflæses, at den blå graf har maksimum ved $2\sqrt{2}$ og minimum ved $-2\sqrt{2}$

Dermed må parameteren S ligge inden for intervallet:

$$-2 \cdot \sqrt{2} \leq S \leq 2 \cdot \sqrt{2} \tag{73}$$

Nu kendes intervallet for parameteren S ifølge den klassiske fysik og ifølge kvantefysikken. Der er dermed opstillet to hypoteser, en for den klassiske fysik: ”middelværdien, S, skal ligge mellem -2 og $+2$”, og en for kvantemekanikken: ”middelværdien, S, skal ligge mellem $-2 \cdot \sqrt{2}$ og $+2 \cdot \sqrt{2}$”. Det kan testes eksperimentelt, om middelværdien ved forskellige vinkler bliver højere end $+2$ eller lavere end -2. Hvis det er tilfældet, er Bells ulighed brudt, hvilket viser, at mindst en af antagelserne om lokalitet, og at en måling ikke kan påvirke en fysisk størrelse, er forkert.

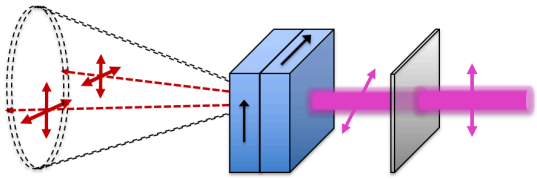
6. Forsøg

6.1 Formål

Formålet med forsøget er at undersøge, hvorvidt fotoner følger den klassiske fysiks forudsigelser eller de kvantemekaniske. Det vil opnås gennem en undersøgelse af, hvorvidt de klassiske grænser for Bells ulighed er brudt eller ej.

6.2 Down-konvertering

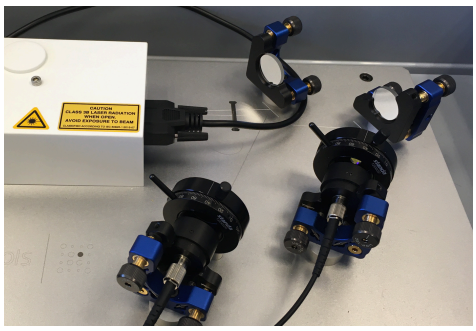
Som det fremgår af udledningen af Bells ulighed, måles der i forsøget på sammenfiltrede fotoner. De dannes ved en proces, der kaldes down-konvertering. Der udsendes blåt lys fra en laser gennem to identiske ikke-lineære krystaller, der er drejet 90° ift. hinanden, så de kun vil lade lys med hhv. lodret og vandret polarisering passere (se figur 10). Krystallerne konverterer en lille del af de indkomne fotoner, så der dannes fotonpar med en lavere frekvens.[18] Lyset fra laseren polariseres til en vinkel på 45° ift. vandret, inden det rammer krystallerne, og der er derfor lige stor sandsynlighed for, at fotonerne bliver vandret og lodret polariseret, som vist i 38 og 39 (se side 11). Da det ikke kan afgøres, om fotonerne bliver down-konverteret af den ene eller anden krystal, og dermed om de er lodret eller vandret polariserede, befinder de sig i en sammenfiltret tilstand:[19]



Figur 10: Down-konvertering: De blå firkanter viser de ikke-lineære krystaller, de lyserøde pile polarisationen af fotonerne før, og de røde pile efter down-konverteringen.

$$|\Phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (|\mathrm{H}\rangle_1|\mathrm{H}\rangle_2 + |\mathrm{V}\rangle_1|\mathrm{V}\rangle_2) \tag{74}$$

Tilstanden i 74 blev brugt i udledningen af Bells ulighed. Hvis man forsøgte at måle, i hvilken krystal fotonerne blev down-konverteret, ville den sammenfiltrede tilstand ikke opstå, da målingen ville kollapse tilstanden som omtalt i postulat 5.



Figur 11: Forsøgsopstilling: To spejle, der dirigerer fotonerne mod de to detektorer.

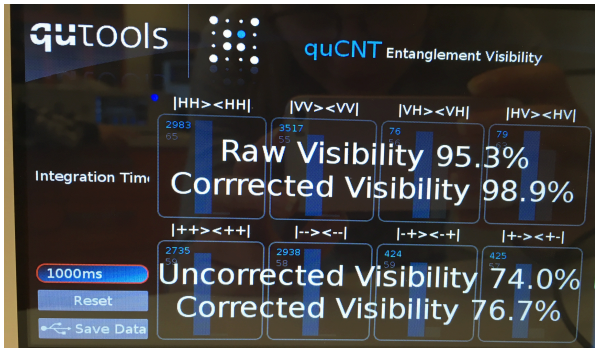
6.3 Fremgangsmåde

Indledningsvis blev måleudstyret (se figur 11) indstillet, så flest mulige fotoner blev detekteret, samtidig med at flest mulige samtidige detektioner af fotoner blev detekteret. Antallet af detekterede fotoner kan aflæses på måleren (se figur 12), og målet er at få de tre signaler

[18] *quED Entanglement Demonstrator* (2017), s. 4
[19] *quED Entanglement Demonstrator* (2017), s. 4

så tæt på hinanden som muligt, mens det grønne signal, der viser antallet af samtidige detektioner, bliver så højt som mulig.

Figur 12: Graf over antal detekterede fotoner. Rød: detektor 1 (N_0), blå: detektor 2 (N_1), grøn: samtidige detektioner (N).



Figur 13: Test af visibilitet ved hhv. H-V og ±-basen.

For at måle præcisionen af indstillingen af måleapparatet, blev der foretaget en "entanglement visibility" test (se figur 13). Det ses af figur 13, at apparatet angiver en visibilitet, der betegner støjniveauet for målingerne. Visibiliteten er beregnet:[20]

$$V = \frac{N_{max} - N_{min}}{N_{max} + N_{min}} \cdot 100\% \tag{75}$$

Hvor N_{max}/N_{min} er det højeste/laveste rate for tællinger af samtidige detektioner inden for samme måling. Det ses, at en høj visibilitet skyldes en lav forskel på N_{max} og N_{min}, og dermed er ensbetydende med et lavt støjniveau.

I forsøget bruges en polarisator, som kun har en spalte, og den kan derfor ikke angive +1 for horisontalt eller -1 for vertikalt, men blot om fotonen passerer spalten eller ej. Derfor skal der også foretages målinger for vinkler, der er vinkelrette på vinklerne α, α', β, og β' (se bilag 4). Antallet af fotoner ved hver polarisator samt antallet af samtidige detektioner måles ved hver mulig kombination af α- og β-vinklerne. Måleserien gentages. For den første måleserie udregner måleapparatet, hvorvidt Bells ulighed brydes eller ej, hvorimod det udregnes ved håndkraft for anden måleserie. Måleapparatet korrigerer for såkaldte falske koincidenser, der betegner samtidige detektioner af fotoner, der ikke er sammenfiltrede fotonpar. Antallet af falske koincidenser kan ikke måles, men beregnes ved formlen:[21]

$$N_{ac} = \frac{N_0 N_1 \tau}{T} \tag{76}$$

Her er N_{ac} antallet af falske koincidenser, N_0 og N_1 antallet af registrerede fotoner ved hver detektor. τ er koincidensvinduet, dvs. tidsintervallet som fotonerne skal detekteres inden for, før de

[20] *QuantumLab – Bell test logbog*, s. 1
[21] *QuantumLab – Bell test logbog*, s. 1

kan siges at være detekteret samtidig. I forsøget er $\tau = 25\ ns$. T er integrationstiden, altså det tidsinterval, hvori der opsamles måledata. I forsøget er $T = 1{,}000\ s$.[22]

De eksperimentelle sandsynligheder for kombinationerne af polarisation kan beregnes:[23]

$$P_{HH}(\alpha,\beta) = \frac{N(\alpha,\beta)}{N_{tot}} \qquad P_{HV}(\alpha,\beta) = \frac{N(\alpha,\beta^{\perp})}{N_{tot}}$$
$$P_{VH}(\alpha,\beta) = \frac{N(\alpha^{\perp},\beta)}{N_{tot}} \qquad P_{VV}(\alpha,\beta) = \frac{N(\alpha^{\perp},\beta^{\perp})}{N_{tot}} \tag{77}$$

Hvor:
$$N_{tot} = N(\alpha,\beta) + N(\alpha,\beta^{\perp}) + N(\alpha^{\perp},\beta) + N(\alpha^{\perp},\beta^{\perp}) \tag{78}$$

6.4 Databehandling

S-værdien for første måleserie blev bestemt til 2,488 med en usikkerhed på $ds = 0{,}020$ (se bilag 5). S-værdien for anden måleserie bestemmes ud fra måledataene (se bilag 5). Korrelationsfunktionen for α og β udregnes her som eksempel:[24]

$$E(\alpha,\beta) = \frac{N(\alpha,\beta) + N(\alpha^{\perp},\beta^{\perp}) - N(\alpha,\beta^{\perp}) - N(\alpha^{\perp},\beta)}{N(\alpha,\beta) + N(\alpha^{\perp},\beta^{\perp}) + N(\alpha,\beta^{\perp}) + N(\alpha^{\perp},\beta)} \tag{79}$$

$$E(\alpha,\beta) = \frac{1823 + 2423 - 515 - 568}{1823 + 2423 + 515 + 568} = 0{,}594 \tag{80}$$

De resterende tre kombinationer udregnes på samme vis (se bilag 6), og er anført i figur 14.

$E(\alpha,\beta) = 0{,}594$	$E(\alpha,\beta') = -0{,}495$	$E(\alpha',\beta) = 0{,}668$	$E(\alpha',\beta') = 0{,}792$

Figur 14: Oversigt for værdierne af korrelationsfunktionerne for de mulige vinkelkombinationer.

Parameteren S bestemmes:

$$S = E(\alpha,\beta) - E(\alpha,\beta') + E(\alpha',\beta) + E(\alpha',\beta') \tag{81}$$

$$S = 0{,}594 - (-0{,}495) + 0{,}668 + 0{,}792 = 2{,}549 \tag{82}$$

Der beregnes en afvigelse fra S-værdien stammende fra første forsøg:

$$\frac{S_1 - S_2}{S_1} = \frac{2{,}549 - 2{,}488}{2{,}488} = 2{,}5\% \tag{83}$$

Yderligere beregnes en afvigelse fra det højest mulige brud på Bells ulighed ved de givne vinkler:

$$\frac{2 \cdot \sqrt{2} - 2{,}549}{2 \cdot \sqrt{2}} = 9{,}9\% \tag{84}$$

[22] *QuantumLab – Bell test logbog*, s. 1
[23] Hoff (2018), *Kvantemekanik…*, s. 5
[24] Hoff (2018), *Kvantemekanik…*, s. 5

6.5 Brydes Bells ulighed?

Med baggrund i forsøgets resultater, vurderes hvorvidt der er tale om en signifikant overskridelse af 2 for S-værdien, og dermed om Bells ulighed brydes eller ej. Begge måleseriers S-værdi afviger fra det højest mulige brud på Bells ulighed med omkring 10%, hvilket der kan være flere grunde til. En af grundene kommer til udtryk i testen af visibiliteten (se figur 13). Grundet den sammenfiltrede tilstand bør der måles lige mange tilfælde, hvor begge fotoner er hhv. lodret og vandret polariserede (eller + og -), og der bør ikke registreres nogen tilfælde, hvor fotonerne er modsat polariseret af hinanden, når vinkelindstillingerne er ens. Det er stort set tilfældet for den første måling, hvor detektorerne er indstillet med en vinkel på 0°, da de grå tal, som angiver støj, næsten er ligeså høje, som antallet af fotoner detekteret med modsat polarisation. Derimod er antallet af fotoner detekteret med modsat polarisation noget højere, når detektorerne drejes med 45°, så der i stedet måles i $\pm$-basen. Sammenholdt med, at der for begge målinger ses et højere antal fotonpar, der detekteres til begge at have lodret polarisering, tyder det på, at måleudstyret er indstillet, så flere fotoner down-konverteres af den ikke-lineære krystal, der kun slipper lodret lys igennem. Det underbygges, når de eksperimentelle sandsynligheder beregnes (se bilag 7). Sandsynligheden for modsat polariserede fotoner er noget højere end den teoretiske, for to horisontalt polariserede fotoner er den omkring 20% mindre end den teoretiske, og for to vertikalt polariserede er den lidt højere. Det kan der korrigeres for ved at forsøge at optimere indstillingen af apparatet på ny, da støjen bl.a. består i, at fotonerne kun detekteres, hvis de rammer direkte vinkelret på detektorerne. Grundet sin lave frekvens befinder de sammenfiltrede fotoner sig i IR-spektret, og det kan dermed ikke ses med det blotte øje, om fotonstrålerne rammer detektoren optimalt. Sammenholdt med at fotonerne skal ramme direkte vinkelret på den optiske fiber i detektoren, hvis de skal registreres, kan meget små justeringer på måleudstyret have stor betydning. En forbedring til forsøget ville være at være mere omhyggelig med at optimere indstillingerne for måleudstyret, da støjen bidrager til et lavere antal koincidenser og dermed en lavere værdi for S, som kan have stor betydning, om Bells ulighed brydes eller ej, samt hvor overbevisende et brud, der forekommer.

En anden fejlkilde er, at det var svært at indstille detektorerne præcist ved de angivne vinkler. Det skyldes, at vinklerne skal indstilles med en 0,5° præcision, mens måleudstyret kun har en streg pr. 2° for vinkelindstillingen. Dermed må det bedømmes ud fra øjemål, hvornår vinklen er indstillet $\frac{1}{4}$-vejs mellem to streger, hvilket resulterer i en vis usikkerhed. En tredje faktor stammer fra, at antallet af detekterede fotoner fluktuerer fra måling til måling. Det fremgår af datasættet i bilag 5, hvor antallet af fotoner detekteret ved den ene detektor ændrer sig, selvom detektorens

vinkelindstilling, α, er uændret. Dog udgør forskellen mellem mindste og største værdi inden for hvert af de fire intervaller mindre end 1% af de pågældende målinger, og derfor har den ovennævnte fluktuering alene ikke den store betydning.

Afvigelsen mellem de to S-værdier, der er bestemt på baggrund af forsøget, skyldes sandsynligvis en kombination af fluktuering og usikkerheden på indstillingen af vinkler, da S-værdierne er regnet på baggrund af to forskellige dataopsamlinger fra samme maskine. En forbedring til forsøget kunne være at fastholde β-vinklerne, der har en præcision på 0,5°, for fire målinger ad gangen frem for α-vinklerne, fordi usikkerheden fra øjemålet da kun ville tælle ind én gang for hver β-vinkel.

Begge forsøg gav anledning til en S-værdi højere end 2, men er forskellen signifikant? En måde at vurdere det på er ved at beregne hvor mange usikkerheder, S-værdien overstiger 2 med. Måleapparatet bestemte usikkerheden på første måling til $ds = 0{,}020$ (se bilag 5). Usikkerheden stammer fra en normalfordeling for målingerne, hvor ds betegner spredningen. Spredningen varierer lidt fra måling til måling, men ligger omkring 0,020 for de pågældende indstillinger. For at undersøge, om bruddet på Bells ulighed er signifikant, beregnes antallet af spredninger, n, som S-værdien afviger fra den klassiske værdi. Normalt vurderes det, at afvigelsen er signifikant, hvis den ligger mere end fem spredninger væk fra det forventede resultat.

$$n = \frac{S - 2 - ds}{ds} = \frac{2{,}549 - 2 - 0{,}020}{0{,}020} = 26 \tag{85}$$

Da resultatet ligger 26 spredninger væk fra den forventede værdi, er der tale om en signifikant afvigelse, og Bells ulighed er brudt. Dog kan forsøget kritiseres for at korrigere for forventede falske koincidenser, da det ikke er en eksperimentelt bestemt størrelse, men en værdi udregnet på baggrund af statistik. Derfor undersøges det, om Bells ulighed stadig er brudt, hvis ikke der tages hensyn til falske koincidenser (se bilag 8). Her opnås en S-værdi på 2,475, hvilket, trods den lavere værdi, stadig må siges at være et signifikant brud på Bells ulighed, idet den ligger 23 spredninger væk. Forsøget kan også kritiseres for ikke at tage hensyn til mulig kommunikation mellem fotonerne. Dog er lignende forsøg foretaget, hvor der er taget højde for den mulighed[25], ved at lade afstanden mellem de to detektorer være så stor, at intet signal med lysets hastighed ville kunne nå at udbrede sig fra den ene detektor til den anden, efter at vinklen er indstillet. Klassisk set giver det anledning til skepsis, da intet signal kan sendes hurtigere end med lysets hastighed, og fotonen ved detektor A dermed ikke burde kunne vide, hvad fotonen ved detektor B oplever. Forklaringen er, at der som tidligere vist ikke er tale om to adskilte partikler, der kommunikerer indbyrdes, men

[25] Zhao, m.fl. (2019), *Higher amounts of loophole-free Bell violations…*, s. 7

derimod et sammenfiltret to-partikelsystem, der ikke kan adskilles. Ingen kommunikation mellem fotonerne er derfor nødvendig, da de er del af samme system og derfor altid vil have samme polarisation, når en måling foretages.

6.6 Konklusion

Baseret på forsøgets måledata og beregninger, kan det konkluderes, at Bells ulighed er brudt. Det er dermed bevist, at fotoner ikke følger lokalitetsprincippet, og at deres tilstand ændres, når der måles på den. Dermed opfører de sig ikke, som den klassiske fysik forudsiger, men følger i stedet kvantemekanikkens forudsigelser. Bohr havde ret, og Einstein tog fejl.

7. Metodeafsnit

I opgaven benyttes hypotetisk-deduktiv metode. På baggrund af Bells ulighed fremsættes to falsificerbare hypoteser, som følger hhv. den klassiske fysik og kvantemekanikken. Gennem en eksperimentel undersøgelse afgøres, hvilken hypotese der forkastes, og hvilken der accepteres. Styrker ved metoden er, at forsøget er reproducerbart og kvantitativt, og det dermed kan gentages mange gange, og resultaterne sammenlignes, så den opnåede viden bliver så sikker som mulig. Blandt svagheder er, at der altid optræder usikkerheder ved udførsel af forsøg, og at fænomenerne undersøges i konstruerede miljøer, hvilket i værste tilfælde kan lede til fejlkonklusioner. Dog begrænses svaghederne af styrkerne, idet betydningen af usikkerheder for et reproducerbart forsøg, mindskes væsentligt, i takt med at forsøget udføres mange gange.

I opgaven kombineres empirisk og formel metode, men hovedvægten ligger på den empiriske metode, da opgavens overordnede formål er at beskrive et virkeligt, fysisk fænomen: fotoners polarisation. Den formelle metode kommer til udtryk i udledningen af Bells ulighed, der baseres på postulater og inddrager det firedimensionale tilstandsrum, som er en abstrakt størrelse uden fysisk virkelighed. Den formelle metode optræder også i forsøgets databehandling i form af beregninger, men her er den blot et redskab til at sige noget om et fysisk fænomen, og derfor anses det som en del af den empiriske metode. Selvom den opnåede viden ved at arbejde empirisk, ikke er 100% sikker, beskriver den virkeligheden, her fotoner, og det er opgavens formål.

8. Konklusion

Intervallet for parameteren, S, i Bells ulighed blev udledt ti $-2 \leq S \leq 2$ for den klassiske fysik og $-2\sqrt{2} \leq S \leq 2\sqrt{2}$ for kvantemekanikken. S-værdien fra Bells ulighed blev i forsøget bestemt til $2{,}488$ for første måling og $2{,}549$ for anden måling. På trods af en afvigelse på omkring 10% fra den højest mulige værdi for S ved de pågældende vinkler, overskrider værdierne den klassiske grænse på 2 med hhv. 23 og 26 spredninger, og der er derfor tale om et signifikant brud på Bells ulighed. Bruddet viser, at der ikke eksisterer skjulte variable, der bestemmer polarisationstilstanden af en foton, som Einstein ellers forudså, og det er dermed bevist, at fotoner ikke altid opfører sig, som den klassiske fysik forudsiger. I stedet får Bohr ret i sin påstand om, at fotoners polarisation er et kvantemekanisk fænomen.

9. Litteraturfortegnelse

Artikler:

- Andersen, Christian og Andrew Wade, ”Bohr vs. Einstein: Fortolkning af kvantemekanikken”, marts 2013: http://dev.quantumlab.dk/referencer/ (11/3/2020)
- Dehlinger, Dietrich og M. W. Mitchell, “Entangled photons, nonlocality, and Bell inequalities in the undergraduate laboratory”, 27/5 2002: https://arxiv.org/pdf/quant-ph/0205171.pdf (12/3/2020)
- DTU, ”Hilbert rum del 1”, 8/4 2014: https://www.youtube.com/watch?v=Co22Wmtvpb4&t=686s (9/3/2020)
- Hansen, Dennis og Alexander B. Ottesen, ”Seperabilitet og graden af entanglement for endeligt dimensionale Hilbert rum”, 28/5 2013: https://projekter.aau.dk/projekter/files/76832084/Separabilitet_og_Graden_af_Entanglement_for_Endeligt_Dimensionale_Hilbertrum.pdf (11/3/2020)
- Hoff, Ulrich, ”Kvantemekanik postulater, notation, polarisationstilstande, entanglement, Bells ulighed…”, 11/2 2018: http://dev.quantumlab.dk/referencer/ (13/3/2020)
- Hoff, Ulrich, ”Prøv kræfter med kvantemekanikken i QuantumLab på DTU Fysik”, marts 2017: http://dev.quantumlab.dk/referencer/ (11/3/2020)
- Lefmann, Jens Ulrich, ”Komplekse tal”, 2011(se bilag 9)
- “QuantumLab – Bell test logbog”: http://dev.quantumlab.dk/referencer/ (13/3/2020)
- ”quED Entanglemend Demonstrator”, 8/3 2017: http://dev.quantumlab.dk/referencer/
- Zhao, Shuai m.fl., “Higher amounts of loophole-free Bell violation using a heralded entangled source”, 2019: https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1367-2630/ab4538/pdf (16/3/2020)
- Zwiebach, Barton, “Dirac’s Bra and Ket Notation”, 7/10 2013: https://ocw.mit.edu/courses/physics/8-05-quantum-physics-ii-fall-2013/lecture-notes/MIT8_05F13_Chap_04.pdf (9/3/2020)
- Zwiebach, Barton, “Multiparticle States and Tensor Products”, 14/12 2013: https://ocw.mit.edu/courses/physics/8-05-quantum-physics-ii-fall-2013/lecture-notes/MIT8_05F13_Chap_08.pdf (9/3/2020)

Figurer

- Figur 10: “QuantumLab – Introduktion til kvantemekanik og Bells ulighed”: http://dev.quantumlab.dk/referencer/ (14/3/2020)

10. Bilag

Bilag 1: Udledning af sandsynlighederne kvant

$$|H_\alpha\rangle = \cos(\alpha)\,|H_1\rangle + \sin(\alpha)|V_1\rangle \tag{86}$$

$$|H_\beta\rangle = \cos(\beta)\,|H_2\rangle + \sin(\beta)|V_2\rangle \tag{87}$$

$$|V_\alpha\rangle = -\sin(\alpha)\,|H_1\rangle + \cos(\alpha)|V_1\rangle \tag{88}$$

$$|V_\beta\rangle = -\sin(\beta)\,|H_2\rangle + \cos(\beta)|V_2\rangle \tag{89}$$

$$|\Phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (|\mathrm{H}\rangle_1|\mathrm{H}\rangle_2 + |\mathrm{V}\rangle_1|\mathrm{V}\rangle_2) \tag{90}$$

HH-polariseret

$$\overline{|H_\alpha\rangle \otimes |H_\beta\rangle} = \langle H_\beta| \otimes \langle H_\alpha| \tag{91}$$

$$\langle H_\beta| \otimes \langle H_\alpha| = (\cos(\beta)_2\,\langle H| + \sin(\beta)_2\,\langle V|) \otimes (\cos(\alpha)_1\,\langle H| + \sin(\alpha)_1\,\langle V|) \tag{92}$$

$$\begin{aligned}\langle H_\beta| \otimes \langle H_\alpha| = {} & \cos(\beta)\cos(\alpha)_2\,\langle H|_1\langle H| + \cos(\beta)\sin(\alpha)_2\langle H|_1\langle V| \\ & + \sin(\beta)\cos(\alpha)_2\,\langle V|_1\langle H| + \sin(\beta)\sin(\alpha)_2\langle V|_1\langle V|\end{aligned} \tag{93}$$

$$\begin{aligned}\langle H_\beta|\langle H_\alpha|\Phi^+\rangle = {} & (\cos(\beta)\cos(\alpha)_2\,\langle H|_1\langle H| + \cos(\beta)\sin(\alpha)_2\langle H|_1\langle V| \\ & + \sin(\beta)\cos(\alpha)_2\,\langle V|_1\langle H| \\ & + \sin(\beta)\sin(\alpha)_2\langle V|_1\langle V|)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(|\mathrm{H}\rangle_1|\mathrm{H}\rangle_2 + |\mathrm{V}\rangle_1|\mathrm{V}\rangle_2)\right) <=> \\ \langle H_\beta|\langle H_\alpha|\Phi^+\rangle = {} & \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos(\beta)\cos(\alpha)\,({}_2\langle H|_1\langle H|H\rangle_1|H\rangle_2 + {}_2\langle H|_1\langle H|V\rangle_1|V\rangle_2) \\ & + \cos(\beta)\sin(\alpha)\,({}_2\langle H|_1\langle V|H\rangle_1|H\rangle_2 + {}_2\langle H|_1\langle V|V\rangle_1|V\rangle_2) \\ & + \sin(\beta)\cos(\alpha)\,({}_2\langle V|_1\langle H|H\rangle_1|H\rangle_2 + {}_2\langle V|_1\langle H|V\rangle_1|V\rangle_2) \\ & + \sin(\beta)\sin(\alpha)({}_2\langle V|_1\langle V|H\rangle_1|H\rangle_2 + {}_2\langle V|_1\langle V|V\rangle_1|V\rangle_2)\end{aligned} \tag{94}$$

$$\langle H_\beta|\langle H_\alpha|\Phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (\cos(\beta)\cos(\alpha) + \sin(\beta)\sin(\alpha)) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \cos(\alpha - \beta) \tag{95}$$

$$P_{HH} = \left|\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \cos(\alpha - \beta)\right|^2 = \frac{1}{2} \cdot \cos^2(\alpha - \beta) \tag{96}$$

HV-polariseret

$$\overline{|H_\alpha\rangle\otimes|V_\beta\rangle} = \langle V_\beta|\otimes\langle H_\alpha| \tag{12}$$

$$\langle V_\beta|\otimes\langle H_\alpha| = (-\sin(\beta)_2\,\langle H| + \cos(\beta)_2\,\langle V|)\otimes(\cos(\alpha)_1\,\langle H| + \sin(\alpha)_1\,\langle V|) \tag{13}$$

$$\begin{aligned}\langle V_\beta|\otimes\langle H_\alpha| = {} & -\sin(\beta)\cos(\alpha)_2\,\langle H|_1\langle H| - \sin(\beta)\sin(\alpha)_2\langle H|_1\langle V| \\ & + \cos(\beta)\cos(\alpha)_2\,\langle V|_1\langle H| + \cos(\beta)\sin(\alpha)_2\langle V|_1\langle V|\end{aligned} \tag{14}$$

$$\begin{aligned}\langle V_\beta|\langle H_\alpha|\Phi^+\rangle = {} & (-\sin(\beta)\cos(\alpha)_2\,\langle H|_1\langle H| - \sin(\beta)\sin(\alpha)_2\langle H|_1\langle V| \\ & + \cos(\beta)\cos(\alpha)_2\,\langle V|_1\langle H| \\ & + \cos(\beta)\sin(\alpha)_2\langle V|_1\langle V|)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(|\mathrm{H}\rangle_1|\mathrm{H}\rangle_2 + |\mathrm{V}\rangle_1|\mathrm{V}\rangle_2)\right) <=>\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\langle V_\beta|\langle H_\alpha|\Phi^+\rangle = {} & \frac{1}{\sqrt{2}}(-\sin(\beta)\cos(\alpha)\,(\,{}_2\langle H|_1\langle H|H\rangle_1|H\rangle_2 + {}_2\langle H|_1\langle H|V\rangle_1|V\rangle_2) \\ & - \sin(\beta)\sin(\alpha)\,(\,{}_2\langle H|_1\langle V|H\rangle_1|H\rangle_2 + {}_2\langle H|_1\langle V|V\rangle_1|V\rangle_2) \\ & + \cos(\beta)\cos(\alpha)\,(\,{}_2\langle V|_1\langle H|H\rangle_1|H\rangle_2 + {}_2\langle V|_1\langle H|V\rangle_1|V\rangle_2) \\ & + \cos(\beta)\sin(\alpha)(\,{}_2\langle V|_1\langle V|H\rangle_1|H\rangle_2 + {}_2\langle V|_1\langle V|V\rangle_1|V\rangle_2)\end{aligned} \tag{15}$$

$$\langle V_\beta|\langle H_\alpha|\Phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot(-\sin(\beta)\cos(\alpha) + \cos(\beta)\sin(\alpha)) \tag{16}$$

$$\sin(x)\cos(y) - \sin(y)\cos(x) = \sin(x-y) \tag{97}$$

$$\langle V_\beta|\langle H_\alpha|\Phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\sin(\alpha-\beta) \tag{98}$$

$$P_{HV} = \left|\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\sin(\alpha-\beta)\right|^2 = \frac{1}{2}\cdot\sin^2(\alpha-\beta) \tag{99}$$

VH-polariseret

$$\overline{|V_\alpha\rangle\otimes|H_\beta\rangle} = \langle H_\beta|\otimes\langle V_\alpha| \tag{20}$$

$$\langle H_\beta|\otimes\langle V_\alpha| = (\cos(\beta)_2\,\langle H| + \sin(\beta)_2\,\langle V|)\otimes(-\sin(\alpha)_1\,\langle H| + \cos(\alpha)_1\,\langle V|) \tag{21}$$

$$\begin{aligned}\langle H_\beta|\otimes\langle V_\alpha| = {} & -\cos(\beta)\sin(\alpha)_2\,\langle H|_1\langle H| + \cos(\beta)\,\mathrm{coss}(\alpha)_2\langle H|_1\langle V| \\ & - \sin(\beta)\sin(\alpha)_2\,\langle V|_1\langle H| + \sin(\beta)\cos(\alpha)_2\langle V|_1\langle V|\end{aligned} \tag{22}$$

$$\langle H_\beta|\langle V_\alpha|\Phi^+\rangle = (-\cos(\beta)\sin(\alpha)_2\,\langle H|_1\langle H| + \cos(\beta)\,\mathrm{coss}(\alpha)_2\langle H|_1\langle V|$$
$$-\sin(\beta)\sin(\alpha)_2\,\langle V|_1\langle H|$$
$$+\sin(\beta)\cos(\alpha)_2\langle V|_1\langle V|)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(|\mathrm{H}\rangle_1|\mathrm{H}\rangle_2 + |\mathrm{V}\rangle_1|\mathrm{V}\rangle_2)\right) <=>$$
$$\langle H_\beta|\langle V_\alpha|\Phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\cos(\beta)\sin(\alpha)\,(\,{}_2\langle H|_1\langle H|H\rangle_1|H\rangle_2 + {}_2\langle H|_1\langle H|V\rangle_1|V\rangle_2) \tag{23}$$
$$+\cos(\beta)\cos(\alpha)\,(\,{}_2\langle H|_1\langle V|H\rangle_1|H\rangle_2 + {}_2\langle H|_1\langle V|V\rangle_1|V\rangle_2)$$
$$-\sin(\beta)\sin(\alpha)\,(\,{}_2\langle V|_1\langle H|H\rangle_1|H\rangle_2 + {}_2\langle V|_1\langle H|V\rangle_1|V\rangle_2)$$
$$+\sin(\beta)\cos(\alpha)(\,{}_2\langle V|_1\langle V|H\rangle_1|H\rangle_2 + {}_2\langle V|_1\langle V|V\rangle_1|V\rangle_2)$$
$$\langle H_\beta|\langle V_\alpha|\Phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot(-\cos(\beta)\sin(\alpha) + \sin(\beta)\sin(\alpha)) = \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\sin(\beta-\alpha) \tag{24}$$

Udtrykket for sandsynligheden ønskes omskrevet til et udtryk, der afhænger af $\alpha - \beta$, ligesom de tre øvrige sandsynligheder. Her udnyttes følgende:

$$\sin(-x) = -\sin(x) \tag{100}$$
$$\sin(\beta-\alpha) = -\sin(\alpha-\beta) \tag{101}$$

Når dettes kvadreres fås samme udtryk som for sandsynligheden for HV-polarisering:

$$P_{VH} = \left|\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot(-\sin(\alpha-\beta))\right|^2 = \frac{1}{2}\cdot\sin^2(\alpha-\beta) \tag{102}$$